Logic of Hide and Seek

作者：涂雅欣，清华大学交叉信息院大三学生

这篇随笔主要介绍一下去年刘奋荣教授、Sujata Ghosh教授、李大柱和我一起完成的一篇论文*On the subtle nature of a simple logic of hide and seek game*。在这篇文章中我们引入了一个新的逻辑LHS (logic of hide and seek) 并探究了它的一些表达力和可计算性上的性质。我想说一说我们设计这个逻辑的背景、动机，聊一聊它具有的一些有趣性质以及它和其他逻辑或其他概念的联系。

背景和定义

背景

我们设计LHS的初衷是想要用逻辑语言形式化地描述我们小时候玩过的捉迷藏游戏。捉迷藏游戏实际是一个两人零和游戏，完全可以被归于一般的两人零和游戏在一般的情景下被研究，但在它本身也具有一些特殊的、给人启发的行为：两个玩家在完全不知道对方位置的情况下在同一张地图上（同速）行走，直到他们在同一地点相遇游戏结束。你可以想象在两个玩家自己的视角下，游戏开始后他们行走在自己所见的世界里，直到在同一地点相遇这两个世界才“重合”。另一方面，我们也可以以全知视角来描述捉迷藏游戏，在这个视角下我们更容易构建出一个简洁的逻辑，进而尝试探讨必胜策略等游戏自身的性质。

语言

基于这样的游戏设定，我们非常自然地设计出了logic of hide and seek (LHS)这样一个二维的模态逻辑，其语言如下：

$\varphi ::= p_L|p_R|I|\neg\varphi|(\varphi\wedge\varphi)|\langle left\rangle\varphi|\langle right\rangle\varphi$

其中$p_L\in P_L$和$p_R\in P_R$来自两个不相交的命题变项集合，这两个集合分别代表了两个玩家的所见。$\langle left\rangle$和$\langle right\rangle$则分别代表着两个玩家各自的行动。I是一个命题常项，代表着两个玩家相遇的情形。为了讨论方便，我们同时定义LHS$_{-I}$为LHS去掉命题常项I所得到的逻辑。

模型

LHS的模型是标准关系模型$M=(W,R,V)$，其中W是一非空点集，R是W上的一个二元关系（边），(W,R)即组成捉迷藏游戏中两个玩家共同行走于的地图。V是一个从P_L和P_R中变项到W子集的赋值函数。与基本模态逻辑不同，这里我们使用的“点模型”是(M,s,t)其中$s,t\in W$分别表示两个玩家的位置。我们正是使用两个维度将两个玩家的世界分开，一人占有一个维度互不影响，只有常项I会让它们纠缠起来。

语义

一个公式φ在一个LHS点模型上取真值 ($M,s,t\models\varphi$) 按照如下递归定义：

$M,s,t\models p_L\Leftrightarrow s\in V(p_L)$

$M,s,t\models p_R\Leftrightarrow t\in V(p_R)$

$M,s,t\models I\Leftrightarrow s=t$

$M,s,t\models\neg\varphi\Leftrightarrow M,s,t\not\models\varphi$

$M,s,t\models\varphi\wedge\psi\Leftrightarrow M,s,t\models\varphi\quad\&\quad M,s,t\models\psi$

$M,s,t\models\langle left\rangle\varphi\Leftrightarrow\exists s'\in W\,s.t.\,Rss'\quad\&\quad M,s',t\models\varphi$

$M,s,t\models\langle right\rangle\varphi\Leftrightarrow\exists t'\in W\,s.t.\,Rtt'\quad\&\quad M,s,t'\models\varphi$

回到捉迷藏游戏，一些已有的和未知的

现在我们可以用LHS的公式来表达我们想表达的捉迷藏游戏中的一些行动。例如$\langle left\rangle\langle right\rangle p_L$实际上等价于$\langle left\rangle p_L$因为第一个玩家的所见不应随着第二个玩家的走动而改变。在全知视角下，如果我们假设两个玩家依次行动，第一个玩家（作为seeker）在第二个玩家（作为hider）行动一步后能够抓住后者可以描述为$[right]\langle left\rangle I$。比较微妙的是，即使在某个时刻$[right]\langle left\rangle I$成立这也不意味着现实中seeker就能抓到hider，因为仅依据seeker的所见她无法判断究竟hider走到了哪里。因而在判断（尤其是带二维命题变项I的）公式在模型上的真值时，我们是站在全知视角而不是玩家视角的。有关玩家视角的游戏描述留待进一步探讨。

我们也希望用LHS来表达某位玩家“存在必胜策略”。但用全知视角的LHS公式表达信息不完全的捉迷藏游戏的玩家必胜策略是不合适的。如果我们转而考虑完全信息版本的捉迷藏游戏（这就变成了经典的cops and robbers game），我们可以用 $\vee_{n\leq|M|^2}([left]\langle right\rangle)^n I$来表达有限图上第一个玩家作为hider而第二个玩家作为seeker的seeker必胜策略存在性。更一般、更少限制的情况有待进一步探讨。

LHS的性质

在设计好LHS之后，我们探究了LHS在可计算性和表达力上的一些性质。其中LHS可满足问题的不可判定性是我们论文的最重要结论。

表达力

基本模态逻辑中互模拟蕴含模态等价。我们也来考虑LHS中的互模拟。LHS$_{-I}$（直觉上可以看成两个基本模态逻辑拼起来）和基本模态逻辑非常近似，因此我们也将LHS$_{-I}$中的互模拟与基本模态逻辑和LHS中的互模拟分别比较。

先考虑LHS$_{-I}$中的模态等价与基本模态逻辑中的模态等价之关系。直接地，LHS$_{-I}$的一个点模型(M,s,t)可以拆成两个基本模态逻辑的点模型(M,s)和(M,t)。当两个LHS$_{-I}$点模型(M,s,t)，(M',s',t')各自对应的点模型分别满足基本模态逻辑完全相同的基本模态逻辑公式集时，这两个LHS$_{-I}$点模型也满足完全相同的LHS$_{-I}$公式集。但反之则不然。原因是在(M,s,t)上s只与P_L中的命题变项有关，在(M,s)上M中的赋值函数同样关心P_R中的命题变项，因此(M,s,t)上的LHS$_{-I}$公式并不能完全覆盖(M,s)上的基本模态逻辑公式；对另一个维度有完全相同的论述。如果我们转而将(M,s,t)拆成(M^L,s)和(M^R,t)其中 $M^L=(W,R,V|_{P_L}),M^R=(W,R,V|_{P_R})$，用$(M^L,s)$和$(M^R,t)$取代之前的$(M,s)$和$(M,t)$，则反方向也就成立。

自然地，我们用标准情况下(M^L,s)和(M^R,t)均互模拟来定义LHS$_{-I}$中(M,s,t)的互模拟。可以想见LHS$_{-I}$中的互模拟也蕴含LHS$_{-I}$中的模态等价但反方向不成立。

再考虑将LHS中的互模拟定义为LHS$_{-I}$中互模拟且满足：(M,s,t)和(M',s',t')互模拟则$s=t$蕴含$s'=t'$。可以证明LHS 互模拟蕴含LHS的模态等价。参考基本模态逻辑中对于m-饱和模型，模态等价反过来蕴含互模拟，我们类似地定义LHS-s饱和模型并证明了在LHS中对于LHS-饱和模型，模态等价反过来也蕴含LHS互模拟。

小结：LHS互模拟严格强于LHS$_{-I}$ 互模拟，而后者严格弱于同一个模型下的两个维度的基本模态逻辑，等价于拆分赋值函数后的两个维度的基本模态逻辑。

可满足问题的不可判定性

一个逻辑L是否可判定通常是指“是否存在一个图灵机能判定任意一个L中的公式的可满足性”。

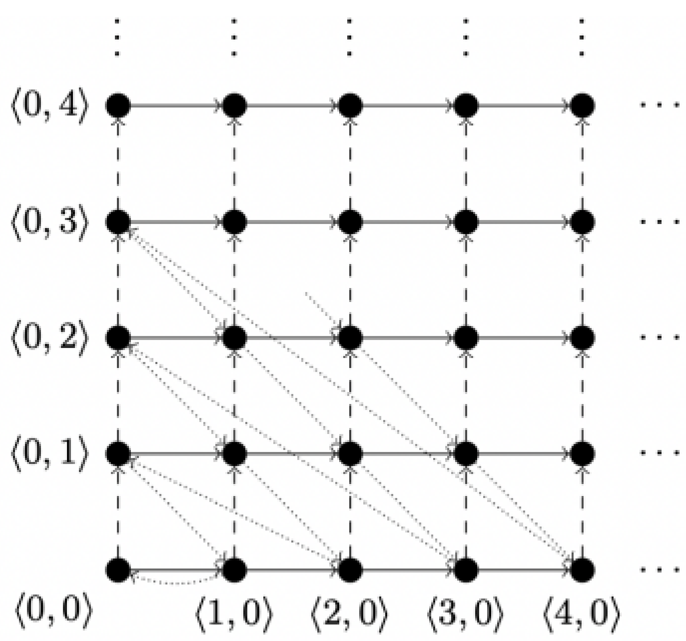
在讨论可判定性之前，我们可以先讨论树模型性质、有穷模型行等可以作为复杂性高低信号的性质。

因为等词I的存在，我们容易分别构造出公式集只能在非树状模型上被满足或只能在无穷模型上被满足。也即：

- LHS不具有树模型性质
- LHS不具有有穷模型性

再回到可判定性问题。我们证明了LHS可满足性问题的不可判定性，方法是将$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$铺砖问题（一个已知的不可判定问题）归约到LHS的可满足问题，以此说明LHS可满足问题的不可判定性。

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$铺砖问题是指给定有限的（正方形）砖类型集合$T$，其中每个砖类型是将砖的四条边各染一种颜色，那么是否可以用T中的砖类型给$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$（每个$(i,j)$坐标对应一块砖）使得相邻两块砖的相接边是同一种颜色。这是一个已知的不可判定问题。



将$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$铺砖问题归约到LHS可满足问题的思路是对于任意给定的砖类型集合T，找到一个公式（等价地，有穷公式集）使得它在一个模型上被满足当且仅当它给出$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$的一个正确铺砖方案。砖的类型显然可以用命题变项来表示。剩下的关键就是用LHS构造出一个$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$的方块盘，在没有有穷模型性的基础上，再一个重要的步骤是表达出“在重合的状态下一边向上一步再向右一步、另一边向右一步再向上一步能够再次重合”的性质。这个性质能延展出一整个方格盘。用LHS中的公式，我们可以这样来表达：

$I \to [left]^{up}[right]^{right}\langle left\rangle^{right}\langle right\rangle^{up} I$

其中$\langle ?\rangle^{up}$和$\langle ?\rangle^{right}$分别对应了表示向上的边R^{up}和表示向右的边R^{right}。注意我们这里使用了两个关系但实际LHS模型只包含一个关系。我们接着可以通过添加两类新的节点，将一个关系的边转化为通过一类新节点的两条边使两个关系变成一个关系。再添加亿点细节即可以得到我们想要的归约。

LHS的不可判定性实际上是由I引起的。如果没有等词，我们可以将任何LHS$_{-I}$的公式转化为一个基本模态逻辑的公式进而可以判定其是否可满足。等词I的加入导致我们可以借助它构造出$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$的方块盘来解决$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$铺砖问题。

像LHS这样因为等词的加入而从可判定变为不可判定的情况在已有的文献中也是存在的，一个经典的例子是Gödel class (形如$\forall x_1\forall x_2\exists y_1\cdots\exists y_n$的有任意谓词符号，但是没有等词、函数符合和常项的一阶公式) 另一个最近被发现的例子是the logic of function dependence。

总结和更多的方向

我们已经介绍了LHS这样一个简单而有趣的逻辑是如何产生的，具有怎样的表达力和可计算性。关于LHS还有很多可以探究的问题：

- 公理化等逻辑本身的行为和性质
- 和其他类似逻辑（如product logic）的关系
- 更多与游戏的联系：能否扩充以描述玩家的视角；能否扩充以描述（无限游戏中）“存在必胜策略”；将I替换成一般的获胜条件会怎样……
- ……

LHS正等待着更多的探索。

Refernces

1. Li D., Ghosh S., Liu F., Tu Y. (2021) On the Subtle Nature of a Simple Logic of the Hide and Seek Game. In: Silva A., Wassermann R., de Queiroz R. (eds) Logic, Language, Information, and Computation. WoLLIC 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 13038. Springer, Cham.
2. Goldfarb, W.: The unsolvability of the G¨odel class with identity. Journal of Symbolic Logic 49, 1237-1252 (1984)
3. P"utzst"uck, P.: Decidability and Bisimulation for Logics of Functional Dependence.
Master's thesis, Mathematical Foundations of Computer Science, RWTH-Aachen
University (2020)